УДК 621.396.967

СЛЮСАР В. И.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МЕТОДА ПРОНИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДАЛЬНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрены варианты сверхразрешения сигналов по времени задержки на основе метода Прони.

Математическая однородность задач спектрального оценивания и определения времени задержки сигналов создает предпосылки для применения единых методов измерения сигнальных параметров в рамках процедур угловой пеленгации, частотной селекции и дальнометрии. Ц е л ь ю настоящей статьи является обобщение известного в спектральном оценивании метода Прони [1] на случай сверхразрешения узкополосных видео- и радиоимпульсов по времени задержки.

Среди всех возможных моделей огибающей импульсов при этом интерес будут представлять только аналитические аппроксимации, допускающие в отсутствие шумов тождественную замену суммы напряжений M сигналов полиномом степени M.

В числе таковых следует, прежде всего, указать колокольную или гауссовскую огибающую, определяемую функцией вида $\exp(-\beta^2 t^2)$. Ориентируясь на измерение дальности непосредственно по отсчетам аналого-цифрового преобразователя (АЦП), можно пренебрегать недостаточной физичностью такой модели, проявляющейся в нефинитности ее как функции времени, поскольку оценка времени задержки может быть осуществлена по положению максимума сигнала. В случае видеоимпульсов указанная модель позволяет использовать для их сверхразрешения так называемый «исходный метод Прони» (ИМП) [1], осуществляющий подгонку M экспонент под $2M$ отсчетов напряжений сигнальной смеси. Рассмотрим специфику его применения подробнее.

В качестве неизвестного времени задержки будем считать смещение d_m первого из $2M$ отсчетов обрабатываемой цифровой выборки напряжений относительно максимума огибающей m-го импульса. Условимся, что на протяжении анализируемого интервала ($2M$ отсчетов) присутствуют все M сигналов, и их энергетика существенно превышает дисперсию шумов.

Сделанные допущения позволяют при комплексном характере напряжений сигнальной смеси выразить $2M$-компонентный вектор отсчетов U в свободном от шумов виде:

$$U = S \cdot A, \qquad (1)$$

где

$$S=\begin{bmatrix} g^{d_1^2} & g^{d_2^2} & \dots & g^{d_м^2} \\ g^{(d_1-z_1)^2} & g^{(d_2-z_1)^2} & \dots & g^{(d_м-z_1)^2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ g^{(d_1-z_{2м-1})^2} & g^{(d_2-z_{2м-1})^2} & \dots & g^{(d_м-z_{2м-1})^2} \end{bmatrix},$$

$$g=\exp(-\beta^2\cdot\Delta t^2),$$

A — вектор комплексных амплитуд $\dot{a}_i$ сигналов, Δt — период дискретизации, z_{m-1} — интервал между m-м и m —1-м отсчетами в периодах дискретизации.

В отличие от экспонент в методе Прони [1], компоненты матрицы S содержат квадраты неизвестных параметров затухания, в роли которых выступают в данном случае времена задержки сигналов d_m. Поэтому матрицу S необходимо привести к каноническому для ИМП виду. С этой целью установим интервал между отсчетами измерительной выборки регулярным, т. е. $z_m=(m-1)\,z_1$, где z_1 — временной интервал в периодах дискретизации между первым и вторым кодами напряжений, используемыми для оценки времени задержки сигнала, m — порядковый номер отсчета АЦП в измерительной выборке, z_m — удаление m-го отсчета от первого в выборке.

Введем понятие обобщенной по времени комплексной амплитуды m-го сигнала $\tilde{a}_m=\dot{a}_m\exp(-\beta^2\,\Delta t^2\,d_m^2)$ и соответствующий ему вектор обобщенных амплитуд $\tilde{A}=\left[\tilde{a}_1\ \tilde{a}_2\ \dots\ \tilde{a}_м\right]^{\mathrm{T}}$. Кроме того, раскроем квадраты в показателях степени элементов g матрицы S. В результате получим следующий эквивалент выражения (1):

$$U=\tilde{S}\cdot\tilde{A}, \tag{2}$$

где

$$\tilde{S}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dfrac{y^{2d_2z_1}}{y^{z_1^2}} & \dfrac{y^{2d_1z_1}}{y^{z_1^2}} & \dots & \dfrac{y^{2d_мz_1}}{y^{z_1^2}} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \dfrac{y^{2d_1(2м-1)z_1}}{y^{(м-1)z_1^2}} & \dfrac{y^{2d_2(2м-1)z_1}}{y^{(м-1)z_1^2}} & \dots & \dfrac{y^{2d_м(2м-1)z_1}}{y^{(м-1)z_1^2}} \end{bmatrix},$$

$$y=\exp(\beta^2\,\Delta t^2).$$

Для исключения нормировки элементов матрицы $\widetilde{S}$ желательно перейти к взвешенному вектору отсчетов напряжений

$$\widetilde{U}=\left[\dot{U}_1\ \dot{U}_2 y^{z_1^2} \dots \dot{U}_{2\,\text{м}} y^{(2\,\text{м}-1)^2 z_1^2}\right]^{\text{T}}.$$

При этом окончательно будем иметь:

$$\widetilde{U}=S_{\text{к}}\cdot\widetilde{A}, \tag{3}$$

где $S_{\text{к}}$ — каноническая матрица вещественных экспонент ИМП вида, элементы которой отличаются от элементов S единичными значениями знаменателей.

Опираясь на эту модель измерительной выборки, остается применить процедуру Прони для подгонки M вещественных экспонент к $2M$ комплексным отсчетам данных. На первом ее этапе следует [1] определить M-компонентный вектор коэффициентов B полинома степени M, решив матричное уравнение:

$$C\cdot B=X, \tag{4}$$

где в данном случае

$$C=\begin{bmatrix} \dot{U}_{\text{м}} y^{(\text{м}-1)^2 z_1^2} & \dot{U}_{\text{м}-1} y^{(\text{м}-2)^2 z_1^2} & \dots & \dot{U}_1 \\ \dot{U}_{\text{м}+1} y^{\text{м}^2 z_1^2} & \dot{U}_{\text{м}} y^{(\text{м}-1)^2 z_1^2} & \dots & \dot{U}_2 y^{z_1^2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \dot{U}_{2\,\text{м}-1} y^{(2\,\text{м}-2)^2 z_1^2} & \dot{U}_{2\,\text{м}-2} y^{(2\,\text{м}-3)^2 z_1^2} & \dots & \dot{U}_{\text{м}} y^{(\text{м}-1)^2 z_1^2} \end{bmatrix},$$

$$X=-\left[\dot{U}_{\text{м}+1} y^{\text{м}^2 z_1^2}\ \dot{U}_{\text{м}+2} y^{(\text{м}+1)^2 z_1^2} \dots \dot{U}_{2\text{м}} y^{(2\,\text{м}-1)^2 z_1^2}\right]^{\text{T}}.$$

$$B=[b_1\ b_2 \dots b_{\text{м}}]^{\text{T}}.$$

Матрица отсчетов в левой части уравнения (4) является теплицевой, поэтому для его решения удобно воспользоваться быстрыми вычислительными алгоритмами [2].

Оценку вектора B можно найти и по методу наименьших квадратов:

$$B=(C^* C)^{-1}\cdot C^*\cdot X, \tag{5}$$

где * — знак комплексного сопряжения.

Определив таким образом компоненты вектора B, на следующем этапе необходимо вычислить корни полинома степени M:

$$\sum_{m=0}^{M} b_m \cdot \tilde{y}^{M-m} = 0, \tag{6}$$

при условии, что $b_0 = 1$ (здесь $\tilde{y} = y^{2\,dz_1}$). Полученные в результате факторизации (6) оценки M неизвестных $\tilde{y}_m$ позволяют выйти на искомые значения времени задержки сигналов:

$$d_m = \frac{1}{2\,z_1\,\beta^2\,\Delta t^2} \ln|\tilde{y}_m|. \tag{7}$$

В качестве варианта практической реализации данного подхода синтезируем односигнальную измерительную процедуру. Из (4) для случая одиночного источника получим: $\dot{U}_1 \cdot b_1 = -\dot{U}_2 \cdot y^{z_1^2}$. Соответствующий вариант полинома (6) примет вид: $b_0\tilde{y} + b_1 = \tilde{y} - \frac{\dot{U}_2 y^{z_1^2}}{\dot{U}_1} = 0$, откуда, $d_1 = \frac{1}{2\,\beta^2\,\Delta t^2\,z_1} \ln\frac{|\dot{U}_2|}{|\dot{U}_1|} + \frac{z_1}{2}$.

При использовании метода наименьших квадратов оценка коэффициента b_1 усложнится, но учитывая, что

$$U_1^s\,U_2^c - U_1^c\,U_2^s = |\dot{U}_1| \cdot |\dot{U}_2|\,(\sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi\sin\varphi) = 0,$$

где φ — начальная фаза сигнала, искомое значение оценки дальности против ожидания не будет столь же громоздким:

$$d_1 = \frac{1}{2\,\beta^2\,\Delta t^2\,z_1} \ln\frac{U_1^c\,U_2^c + U_1^s\,U_2^s}{U_1^{c^2} + U_1^{s^2}} + \frac{z_1}{2}.$$

Заметим, что к таким же формулам для d_1 несложно прийти и на основе частного напряжений пары отсчетов АЦП. В двухсигнальном случае аналогичные выкладки для (4) и (6) сводятся к следующему:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_2 y^{z_1^2} & \dot{U}_1 \\ \dot{U}_3 y^{4 z_1^2} & \dot{U}_2 y^{z_1^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dot{U}_3 y^{4 z_1^2} \\ \dot{U}_4 y^{9 z_1^2} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{y}^2 + b_1\tilde{y} + b_2 = 0,$$

причем оценки b_1, b_2 по методу наименьших квадратов таковы:

$$b_1 = \frac{(\tilde{U}_{12} + \tilde{U}_{23})\,(\tilde{U}_{13} + \tilde{U}_{42}) - (\tilde{U}_1^2 + \tilde{U}_2^2)\,(\tilde{U}_{23} + \tilde{U}_{43})}{\mathrm{Det}};$$

$$b_2=\frac{(\widetilde{U}_{23}+\widetilde{U}_{43})(\widetilde{U}_{12}+\widetilde{U}_{23})-(\widetilde{U}_1^2+\widetilde{U}_3^2)(\widetilde{U}_{13}+\widetilde{U}_{42})}{\mathrm{Det}};$$

$$\mathrm{Det}=(\widetilde{U}_1^2+\widetilde{U}_3^2)(\widetilde{U}_1^2+\widetilde{U}_2^2)-(\widetilde{U}_{12}+\widetilde{U}_{23})^2,$$

$$\widetilde{U}_{nm}=\widetilde{U}_n^c\widetilde{U}_m^c+\widetilde{U}_n^s\widetilde{U}_m^s,\ \widetilde{U}_n^2=\widetilde{U}_n^{c\,2}+\widetilde{U}_n^{s\,2},$$

$$\widetilde{U}_2=\dot{U}_2y^{z_1^2},\ \widetilde{U}_3=\dot{U}_3y^{4z_1^2},\ \widetilde{U}_4=\dot{U}_4y^{9z_1^2}.$$

Рассмотренный вариант интерпретации ИМП на базе вещественных экспонент может быть применен также для сверхразрешения комплексных гауссовских радиоимпульсов. С этой целью необходимо предварительно довернуть все комплексные отсчеты АЦП по фазе на величину, компенсирующую ее набег за временной интервал между ними. Соответствующая процедура фазирования элементов квадратур взвешенного вектора отсчетов $\widetilde{U}$ запишется в виде:

$$\widetilde{U}_{s\,\text{ф}}^c=\widetilde{U}_s^c\cos p_s+\widetilde{U}_s^s\sin p_s;\quad \widetilde{U}_{s\,\text{ф}}^s=\widetilde{U}_s^s\cos p_s-\widetilde{U}_s^c\sin p_s,$$

где $p_s=\omega\,\Delta t\,z_s$, z_s — временной интервал между первым и s-м комплексными напряжениями сигналов.

При использовании подгонки данных под комплексные экспоненты надобность в предварительном довороте фазы отсчетов радиоимпульсов отпадает. Изменению при этом подвергается сама модель задействованной выборки отсчетов (3), в которой каждый m-й элемент n-й строки матрицы $S_к$ домножается на величину $\exp\,[j\,\omega_m\,\Delta t\,z_1\,(n-1)\,]$, где ω_m — известная частота заполнения m-го радиоимпульса.

В итоге факторизация соответствующего выражению (3) полинома будет проведена относительно комплексных корней

$$\widetilde{y}_m=\exp\,[\beta^2\,\Delta t^2\,2\,d_m\,z_1+j\,\omega_m\,\Delta t\,z_1\,],$$

а неизвестные времена задержки определятся через их модули $|\widetilde{y}_m|$ по формуле (7).

При рассмотренном подходе возможно совместное оценивание моментов прихода сигналов и их частот заполнения, если последние неизвестны. В роли частот могут фигурировать также пеленги источников. При этом искомые оценки сопутствующего времени задержки параметра определяются согласно [1] по отношению квадратур комплексных корней полинома $\widetilde{y}_m$. В данном случае

$$\omega_m=\mathrm{arctg}\,[\mathrm{Im}\,\{\widetilde{y}_m\}\,/\,\mathrm{Re}\,\{\widetilde{y}_m\}\,]\,/\,(\Delta t\,z_1).$$

Характерно, что разрешение по времени задержки и точность его измерения не зависят от наличия и качества информации о частоте или пеленге сигнала.

Поскольку априорные сведения о количестве источников сигналов обычно отсутствуют, применение метода Прони тесно связано с определением порядка модели M. Данная задача может решаться посредством традиционных для него подходов, связанных с анализом сингулярных чисел матрицы отсчетов [1] либо с искусственным завышением количества сигналов и отсевом шумовых решений на основе линейного предсказания вперед—назад [1]. Более компактная по объему вычислительной выборки альтернатива состоит в использовании модифицированной функции правдоподобия, из которой исключены неизвестные амплитуды сигналов [3, 4]. При этом в рамках метода Прони прогоняются все допустимые модели сигнальной смеси с возрастающим от 1 до M порядком, а полученные оценки времени задержки сигналов далее подставляются в аналогичную [4] модификацию функции правдоподобия:

$$F_{\text{м}} = -\frac{D}{D_{\text{м}}} = \max, \tag{8}$$

где $D_{\text{м}}$ — определитель матрицы $[\dot{Q}_{ij}]$, $i, j = 1, ..., M$; D — определитель матрицы, отличающийся от $[\dot{Q}_{ij}]$ первыми строкой и столбцом с элементами $0, \dot{W}_1^*, ..., \dot{W}_{\text{м}}^*$;

$$\dot{W}_n = \sum_{s=r_n}^{r_n+N-1} (U_s^c + j\,U_s^s)\,\dot{K}_{sn}^*;\quad \dot{Q}_{mn} = \dot{Q}_{nm}^* = \sum_{s=r_m}^{r_n+N-1} \dot{K}_{sm}\,\dot{K}_{sn}^*,$$

$$\dot{K}_{sm} = K_{sm}\,\{\cos(\omega_m\,\Delta t\,(s-r_m)) + j\sin(\omega_m\,\Delta t\,(s-r_m))\},$$

$$\dot{K}_{sm}^* = K_{sm}\,\{\cos(\omega_m\,\Delta t\,(s-r_m)) - j\sin(\omega_m\,\Delta t\,(s-r_m))\},$$

s — текущий номер временного отсчета, r_n — номер первого из временных отсчетов в пределах существования n-го сигнала, $r_n = s_{n_{\max}} - d_n$, $s_{n_{\max}}$ — положение максимума n -го сигнала, d_n — оценка времени задержки (7) n-го импульса,

$$K_{sm} = \begin{cases} \exp\left(-\beta^2\,\Delta t^2\left(s - r_m - \dfrac{N}{2}\right)^2\right) \text{при } r_m \le s \le r_m + N \\ 0 \text{ при } s < r_m \text{ и } s > r_m + N, \end{cases}$$

N — длительность сигнала в отсчетах АЦП (предполагается, что все сигналы имеют одинаковую протяженность во времени).

В случае видеоимпульсов вместо $\dot{K}_{sm}$ и $\dot{K}^*_{sm}$ следует непосредственно использовать вещественную функцию K_{sm}.

Существенно, что размерность вектора отсчетов напряжений U можно ограничить порядком M. При этом наиболее правдоподобным считается набор оценок r_m, максимизирующих критерий (8).

В заключение следует отметить, что различные модификации метода Прони не исчерпывают всех возможных подходов к решению задач сверхразрешения по дальности на основе детерминистских моделей сигналов. Наряду с такими достоинствами как высокая точность оценивания времени задержки, независимость ее от точности определения частоты или пеленга сигналов, методу Прони присущ недостаток, связанный с необходимостью обработки $2M$ комплексных отсчетов данных. Такая размерность измерительной выборки является избыточной хотя бы потому, что для разрешения M импульсов с неизвестными временами прихода и комплексными амплитудами достаточно иметь 1,5 M комплексных отсчетов (при четном M) или $1{,}5\,M + 0{,}5$ (при M нечетном). Если же провести сепарацию неизвестных амплитуд сигналов, то для сведения дальномерной задачи к нахождению корней полинома степени M при гауссовской огибающей понадобится всего лишь M+1 комплексное напряжение.

В случае ограниченной частоты дискретизации и малых длительностей сигналов указанный фактор может стать определяющим при выборе других подходов, не столь критичных к протяженности обрабатываемой выборки напряжений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Марпл-мл. С. Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения / Пер. с англ.— М. : Мир, 1990.— С. 365—417.

2. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов: Пер. с англ.— М. : Мир, 1989.— С. 372—401.

3. *Варюхин В. А., Покровский В. И., Сахно В. Ф.* Модифицированная функция правдоподобия в задаче измерения угловых координат источников с помощью антенной решетки // ДАН СССР, 1983.— Т. 270.— № 5.— С. 1092—1094.

4. *Слюсар В. И.* Синтез алгоритмов измерения дальности M источников при дополнительном стробировании отсчетов АЦП // Радиоэлектроника.— 1996.— № 5.— С. 55—62. (Изв. высш. учеб. заведений).

5. *Ицхоки Я. С.* Импульсные устройства.— М. : Сов. радио, 1959.— С. 111.

г. Киев.

Поступила в редакцию 09.09.96.