

## ИЗМЕРЕНИЕ ПЕРИОДА ДИСКРЕТИЗАЦИИ АЦП ПО СУММЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Рассмотрены процедуры измерения периода дискретизации АЦП, основанные на использовании в качестве тестового сигнала суммы гармонических колебаний разных частот, приведены соответствующие аналитические оценки точности.

При использовании методов измерения периода дискретизации  $\Delta t$  [1] в качестве одного из приемов повышения достоверности получаемых оценок может быть рекомендован последовательный замер  $\Delta t$  по гармоническим сигналам разных частот. Такой подход позволяет усреднить ошибки оценивания, обусловленные нелинейными искажениями гармонических сигналов в генераторном приборе, особенно аналоговом, при условии, что указанные нелинейные эффекты зависят от частоты генерируемых колебаний. В процессе ряда экспериментов, проводившихся указанным образом, у автора возникла идея сокращения времени оценивания  $\Delta t$  путем подачи на вход АЦП одновременно нескольких гармонических сигналов. Целью статьи является рассмотрение соответствующих алгоритмов измерения периода дискретизации АЦП и анализ их потенциальной точности.

При использовании в качестве источников тестовых сигналов стандартных аналоговых генераторов не представляется возможным добиться одинаковой начальной фазы гармонических воздействий разных частот в суммарном сигнале. Поэтому синтез измерительной процедуры предпочтительнее начать, исходя из условия учета различий в фазах гармонических колебаний.

Воспользовавшись методом максимального правдоподобия, в предположении о некоррелированности и гауссовском характере шумов, запишем информационный эквивалент функции правдоподобия для вещественной формы представления сигналов:

$$F = \sum_{s=1}^S \left\{ U_s - \sum_{m=1}^M a_m \cos(\omega_m \Delta t (s-1) + \varphi_m) \right\}^2$$

или, обозначив

$$a_m^c = a_m \cos \varphi_m, \quad a_m^s = a_m \sin \varphi_m, \quad p_{ms} = \omega_m \Delta t (s-1),$$

$$F = \sum_{s=1}^S \left\{ U_s - \sum_{m=1}^M (a_m^c \cos p_{ms} - a_m^s \sin p_{ms}) \right\}^2 = \min. \quad (1)$$

Используя подход, рассмотренный в [1], искомую измерительную процедуру несложно представить как

$$F_M = \sum_{m=1}^M \left[ a_m^c \sum_{s=1}^S U_s \cos p_{ms} - a_m^s \sum_{s=1}^S U_s \sin p_{ms} \right] = \max, \quad (2)$$

где  $a_m^c, a_m^s$  — оценки квадратурных составляющих амплитуды  $m$ -го сигнала.

Здесь учтено, что минимум выражения (1) достигается при максимуме получаемых в результате возведения в квадрат удвоенных произведений. Кроме того, сделано допущение, что амплитуда сигналов на протяжении  $S$  отсчетов остается неизменной.

Что касается оценок амплитуд, то их, прежде всего, можно получить, решая систему уравнений правдоподобия:

$$\partial F / \partial a_m^c = 0; \quad \partial F / \partial a_m^s = 0.$$

На основании правила Крамера в результате можно записать:

$$a_m^c = D_m^c / D; \quad a_m^s = D_m^s / D, \quad (3)$$

где

$$D = \begin{vmatrix} B_{11} & C_{12} & \dots & C_{1M} \\ C_{21} & B_{22} & \dots & C_{2M} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{M1} & C_{M2} & \dots & B_{MM} \end{vmatrix}, \quad (4)$$

$$B_{nn} = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^S \cos^2 p_{ns} & -0,5 \sum_{s=1}^S \sin 2p_{ns} \\ -0,5 \sum_{s=1}^S \sin 2p_{ns} & \sum_{s=1}^S \sin^2 p_{ns} \end{bmatrix},$$

$$C_{nm} = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^S \cos p_{ns} \cos p_{ms} & - \sum_{s=1}^S \cos p_{ns} \sin p_{ms} \\ - \sum_{s=1}^S \cos p_{ms} \sin p_{ns} & \sum_{s=1}^S \sin p_{ns} \sin p_{ms} \end{bmatrix}, \quad C_{nm} = C_{mn}^T,$$

определители  $D_m^c$ ,  $D_m^s$  получены из определителя  $D$  заменой соответствующего  $m$ -го четного (для  $D_m^c$ ) или нечетного (для  $D_m^s$ ) столбца вектором свободных членов  $\{W_1, W_2, W_3 \dots W_M\}^T$ , где

$$W_m = \begin{bmatrix} S & S \\ -\sum_{s=1}^S U_s \cos p_{ms} & \sum_{s=1}^S U_s \sin p_{ms} \end{bmatrix}^T.$$

Таким образом, задача определения  $\Delta t$  по сумме  $M$  гармонических сигналов, представленных в вещественной форме, свелась к максимизации (2) с учетом (3), путем перебора возможных значений  $\Delta t$  до момента достижения функцией (2) глобального максимума.

Оценим потенциальную точность данного метода, используя нижнюю границу Крамера—Рао. Для сокращения выкладок обратимся к матричной записи, представив вектор отсчетов в виде:

$$U = FA, \quad (5)$$

где  $U = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_S]^T$  — вектор напряжений сигнальной смеси;  $A = [a_1^c \ a_1^s \ a_2^c \ a_2^s \ \dots \ a_M^c \ a_M^s]^T$  — вектор квадратурных составляющих амплитуд сигналов,

$$F = \begin{bmatrix} \cos p_{11} & -\sin p_{11} & \cos p_{21} & -\sin p_{21} & \dots & \cos p_{M1} & -\sin p_{M1} \\ \cos p_{12} & -\sin p_{12} & \cos p_{22} & -\sin p_{22} & \dots & \cos p_{M2} & -\sin p_{M2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \cos p_{1S} & -\sin p_{1S} & \cos p_{2S} & -\sin p_{2S} & \dots & \cos p_{MS} & -\sin p_{MS} \end{bmatrix}.$$

Используя выражение для матрицы Фишера, полученное в [2] на основе производной Нойдеккера, применительно к рассматриваемому случаю запишем:

$$I = \frac{1}{\sigma_{ш}^2} \begin{bmatrix} F^T F & (A^T \otimes F^T) \frac{\partial F}{\partial \Delta t} \\ \left( \frac{\partial F}{\partial \Delta t} \right)^T (A \otimes F) & \left( \frac{\partial F}{\partial \Delta t} \right)^T (A A^T \otimes 1_S) \frac{\partial F}{\partial \Delta t} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где элементы блока  $F^T F$  тождественны элементам определителя (4),

$$\left\{ (A^T \otimes F^T) \frac{\partial F}{\partial \Delta t} \right\}^T = \left( \frac{\partial F}{\partial \Delta t} \right)^T (A \otimes F),$$

$$(A^T \otimes F^T) \frac{\partial F}{\partial \Delta t} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_M \end{bmatrix}, \quad T_n = \begin{bmatrix} -\sum_{s=1}^S \sum_{m=1}^M a_m p'_{ms} \cos p_{ns} \sin(p_{ms} + \varphi_m) \\ \sum_{s=1}^S \sum_{m=1}^M a_m p'_{ms} \sin p_{ns} \sin(p_{ms} + \varphi_m) \end{bmatrix},$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \Delta t} \right)^T (A A^T \otimes 1_S) \frac{\partial F}{\partial \Delta t} = \sum_{s=1}^S \left\{ \sum_{m=1}^M a_m p'_{ms} \sin(p_{ms} + \varphi_m) \right\}^2.$$

Интересующая оценка дисперсии  $\sigma_{\Delta t}^2$  может быть найдена в результате обращения матрицы (6). Учитывая известный механизм обращения матриц, можно записать:

$$\sigma_{\Delta t}^2 \geq \frac{\sigma_{\text{III}}^2 |F^T F|}{\begin{vmatrix} F^T F & \dots & (A^T \otimes F^T) \frac{\partial F}{\partial \Delta t} \\ \dots & \dots & \dots \\ \left( \frac{\partial F}{\partial \Delta t} \right)^T (A \otimes F) & \dots & \left( \frac{\partial F}{\partial \Delta t} \right)^T (A A^T \otimes 1_S) \frac{\partial F}{\partial \Delta t} \end{vmatrix}} \quad (7)$$

В случае одного источника

$$F^T F = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^S \cos^2 p_{ns} & -0,5 \sum_{s=1}^S \sin 2p_{ns} \\ -0,5 \sum_{s=1}^S \sin 2p_{ns} & \sum_{s=1}^S \sin^2 p_{ns} \end{bmatrix},$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \Delta t} \right)^T (A A^T \otimes 1_S) \frac{\partial F}{\partial \Delta t} = \sum_{s=1}^S \left\{ a_1 p'_{1s} \sin(p_{1s} + \varphi_1) \right\}^2,$$

$$(A^T \otimes F^T) \frac{\partial F}{\partial \Delta t} = \begin{bmatrix} -\sum_{s=1}^S a_1 p'_{1s} \cos p_{1s} \sin(p_{1s} + \varphi_1) \\ \sum_{s=1}^S a_1 p'_{1s} \sin p_{1s} \sin(p_{1s} + \varphi_1) \end{bmatrix}.$$

Отсюда, в результате несложных преобразований, можно получить известную по [1] оценку дисперсии ошибки измерения  $\Delta t$  по гармоническому сигналу.

Заметим, что для формирования многочастотного пакета необязательно наличие нескольких генераторов, можно последовательно сохранить в файлах массивы отсчетов  $M$  гармонических колебаний, полученных в результате оцифровки, а затем сложить их в соответствии с порядковыми номерами отсчетов. Результирующий файл будет представлять собой сумму из  $M$  тестовых сигналов. Единственным недостатком такого подхода является рост дисперсии шума в результате суммирования. Впрочем, он легко компенсируется увеличением размерности выборки. К тому же, при отрицательной взаимной корреляции шумов генератора на разных частотах, может статься, что результирующий шум, напротив, упадет по мощности.

Другой подход, свободный от проблемы роста суммарной дисперсии шума, сводится к использованию программного моделирования суммы сигналов  $M$  частот с последующим ее воспроизведением в аналоговом виде посредством ЦАП. В этом случае тестовый генератор или их совокупность заменяется еще одним компьютером с установленной в нем платой цифро-аналогового преобразователя. При высокой разрядности ЦАП (14 и более разрядов) и достаточном быстродействии можно добиться сравнительно малой величины дисперсии цифрового шума. Поэтому такой подход для низкочастотных АЦП может быть предпочтительным.

Как отмечалось в [1], при вещественной форме представления сигнала дисперсия оценки  $\Delta t$  зависит от начальной фазы тест-воздействия, поэтому целесообразен переход к комплексному представлению напряжений, например, путем дискретной гильбертовской фильтрации. В случае  $M$  сигналов данная рекомендация по-прежнему остается в силе, подтверждением чему может служить комплексная альтернатива (2) и соответствующая ей оценка точности.

Запишем минимизируемый функционал в виде:

$$F = \sum_{s=1}^S \left\{ U_s^c - \sum_{m=1}^M a_m \cos(\omega_m \Delta t (s-1) + \varphi_m) \right\}^2 + \sum_{s=1}^S \left\{ U_s^s - \sum_{m=1}^M a_m \sin(\omega_m \Delta t (s-1) + \varphi_m) \right\}^2.$$

Используя обозначения (1), отсюда несложно получить комплексный аналог (2):

$$\begin{aligned}
 F_M = & \sum_{m=1}^M a_m^c \sum_{s=s_1}^S \left\{ U_s^c \cos p_{sm} + U_s^s \sin p_{sm} \right\} + \\
 & + \sum_{m=1}^M a_m^s \sum_{s=s_1}^S \left\{ U_s^s \cos p_{sm} - U_s^c \sin p_{sm} \right\} = \max. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Соответствующая оценка дисперсии может быть сформирована из (7) заменой знака операции транспонирования «Т» на символ комплексного сопряжения. При этом следует учесть, что компоненты матричного выражения (5) примут вид

$$\begin{aligned}
 U &= [\dot{U}_1 \ \dot{U}_2 \ \dots \ \dot{U}_S]^T, A = [\dot{a}_1 \ \dot{a}_2 \ \dots \ \dot{a}_M]^T, \\
 F &= \begin{bmatrix} \exp(j p_{11}) & \exp(j p_{21}) & \dots & \exp(j p_{M1}) \\ \exp(j p_{12}) & \exp(j p_{22}) & \dots & \exp(j p_{M2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \exp(j p_{1S}) & \exp(j p_{2S}) & \dots & \exp(j p_{MS}) \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

в результате чего получим:

$$\begin{aligned}
 F^* F &= \begin{bmatrix} S & \dots & \sum_{s=1}^S \exp [j (p_{Ms} - p_{1s})] \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{s=1}^S \exp [j (p_{1s} - p_{Ms})] & \dots & S \end{bmatrix} \\
 \left( \frac{\partial F}{\partial \Delta t} \right)^* (A A^* \otimes 1_S) \frac{\partial F}{\partial \Delta t} &= \sum_{s=1}^S \left\{ \sum_{m=1}^M \dot{a}_m p'_{ms} \exp(-j p_{ms}) \right\} \times \\
 & \times \left\{ \sum_{m=1}^M \dot{a}_m^* p'_{ms} \exp(j p_{ms}) \right\},
 \end{aligned}$$

$$(A^* \otimes F^*) \frac{\partial F}{\partial \Delta t} = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^S \sum_{m=1}^M j a_m^* p'_{ms} \exp [j (p_{ms} - p_{1s})] \\ \sum_{s=1}^S \sum_{m=1}^M j a_m^* p'_{ms} \exp [j (p_{ms} - p_{2s})] \\ \vdots \\ \sum_{s=1}^S \sum_{m=1}^M j a_m^* p'_{ms} \exp [j (p_{ms} - p_{Ms})] \end{bmatrix}$$

При одиночном гармоническом сигнале  $M = 1$  и

$$F^* F = S, \quad (A^* \otimes F^*) \frac{\partial F}{\partial \Delta t} = j a_1^* \sum_{s=1}^S p'_{1s},$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \Delta t} \right)^* (A^* \otimes F) = -j a_1 \sum_{s=1}^S p'_{1s},$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \Delta t} \right)^* (A A^* \otimes 1_S) \frac{\partial F}{\partial \Delta t} = \sum_{s=1}^S a_1^2 p'_{1s}{}^2.$$

Отсюда,

$$\sigma_{\Delta t}^2 \geq \frac{\sigma_{\text{ш}}^2}{a_1^2 \left( \sum_{s=1}^S p'_{1s}{}^2 - \frac{1}{S} \left( \sum_{s=1}^S p'_{1s} \right)^2 \right)}.$$

Учитывая, что  $p'_{1s} = \omega_1 (s - 1)$ , после ряда преобразований можно получить:

$$\sigma_{\Delta t}^2 \geq \frac{12\sigma_{\text{ш}}^2}{a_1^2 \omega_1^2 S(S^2 - 1)}, \quad (9)$$

что хорошо согласуется с известными соотношениями для вещественного тест-сигнала [1].

Таким образом, зависимость  $\sigma_{\Delta t}^2$  от начальной фазы при одиночном сигнале исчезла, что и требовалось доказать. При большем количестве комплексных гармонических воздействий существенными оказываются не сами

начальные фазы сигналов, а их разности. В этом можно убедиться, проанализировав аргументы комплексных экспонент определителя информационной матрицы Фишера. В частности, при  $M=2$  нижний элемент ее главной диагонали имеет вид

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \Delta t}\right)^* (A A^* \otimes 1_s) \frac{\partial F}{\partial \Delta t} = \sum_{s=1}^M \left( \sum_{m=1}^M a_m^2 p_{ms}'^2 + 2a_1 a_2 p_{1s}' p_{2s}' \cos(\Delta \omega_{12} \Delta t (s-1) - \Delta \varphi_{12}) \right),$$

где  $\Delta \omega_{12} = \omega_1 - \omega_2$ ,  $\Delta \varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ . От значений  $\Delta \omega_{12}$ ,  $\Delta \varphi_{12}$  зависят и остальные трансцендентные слагаемые, получаемые в результате раскрытия и последующих преобразований определителя знаменателя (7).

Для изучения характера зависимости  $\sigma_{\Delta t}^2$  с помощью пакета Mathcad 7.0 был проведен вычислительный эксперимент применительно к  $M=2$ . При этом рассматривались различные соотношения амплитуд, частот сигналов и их начальных фаз, а также варьировалась величина произведения  $\Delta \omega_{12} \Delta t$ . В результате расчета дисперсии (9) и значения  $\sigma_{\Delta t}^2$  соответствующего двухсигнальной ситуации, было установлено, что превосходство в точности над односигнальной измерительной процедурой, в пределах ее зоны однозначного измерения, обеспечивается двухчастотным подходом лишь для ограниченного ряда условий. При этом наибольший выигрыш по дисперсии ошибки в случае благоприятных сочетаний параметров сигналов не превышает двух раз. Существенно, что соотношение величин  $\Delta \omega_{12}$  и  $\Delta t$  при прочих равных условиях может кардинально изменить ситуацию, напроць лишив двухсигнальное оценивание каких-либо преимуществ. Поэтому, если максимальная частота генерируемых сигналов не выходит за пределы диапазона, соответствующего однозначному измерению  $\Delta t$  по единичному воздействию, применение двухчастотного оценивания может рассматриваться лишь как дополнительная процедура по отношению к односигнальному методу. Имеется в виду, что полученную на этапе моносигнального измерения оценку  $\Delta t$  далее можно уточнить, тщательно подобрав параметры двухчастотной смеси.

Что касается явной предпочтительности многосигнальных измерений, то всерьез о ней можно говорить лишь при использовании в тестовом пакете колебаний, превышающих по частоте упомянутый выше предел однозначности. При этом достигается внушительная разница в дисперсиях  $\sigma_{\Delta t}^2$ , составляющая несколько порядков, причем оптимальное сочетание всех параметров многочастотного пакета целесообразно и в этом случае. На рис. 1 приведены

результаты максимизации в пакете Mathcad 7.0 соотношения (8) в одно- (кривая  $V(t)$ ) и двухсигнальном (кривая  $P(t)$ ) случаях при нулевой дисперсии шума. Истинному значению  $\Delta t$  соответствует величина 0,05 на горизонтальной оси графика. При этом на рис. 1а для односигнальных измерений использовалось гармоническое колебание большей частоты, а на рис. 1б — меньшей. Нетрудно заметить, что зона однозначного измерения  $\Delta t$  по двухсигнальному методу значительно превышает аналогичный диапазон для односигнального подхода. О выигрыше в точности позволяет судить ширина главного пика максимизируемых путем перебора оценок  $\Delta t$  функций.

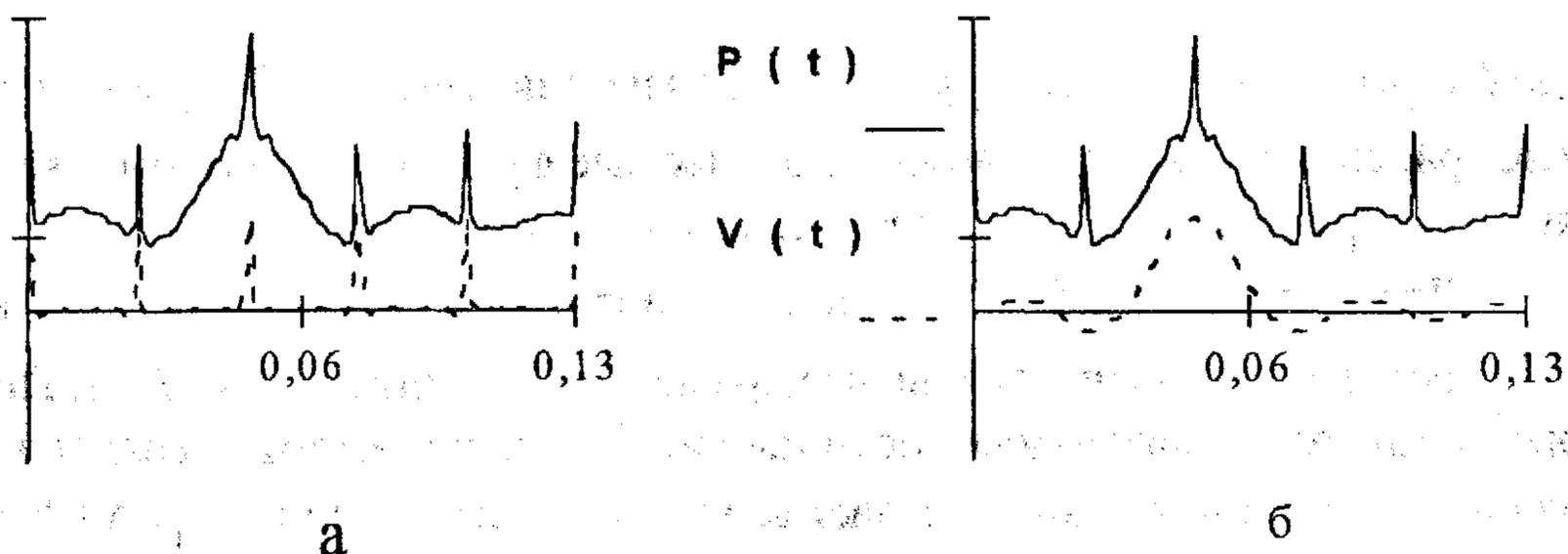


Рис. 1

Следует отметить, что используемые в (2) и (8) оценки амплитуд могут быть получены также в результате операции быстрого преобразования Фурье (БПФ), при использовании рекомендаций [3].

В заключение автор вынужден принести извинения читателям за допущенную по его вине опечатку в упоминавшемся выше источнике [1]: правильная запись выражения (9) на стр. 46 [1] на самом деле должна быть следующей:

$$Q_M = \frac{D_1^2 f_2 + D_2^2 f_1 - D_1 D_2 f_3}{D} = \max.$$

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Слюсар В. И. Измерение периода дискретизации АЦП по сигналу известной частоты // Радиоэлектроника.— 1998.— № 5.— С. 43—47. (Изв. высш. учеб. заведений).
2. Слюсар В. И. Синтез алгоритмов измерения дальности М источников при дополнительном стробировании отсчетов АЦП // Радиоэлектроника.— 1996.— № 5.— С. 55—62. (Изв. высш. учеб. заведений).
3. Патент РФ № 2054684, МПК G01R 23/16. Способ измерения амплитудно-частотных характеристик // В. И. Слюсар.— Оpubл. в БИ № 5, 20.02.96.

г. Киев.

Поступила в редакцию 26.06.98.