БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вопросы статистической теории радиолокации / П. А. Бакут, И. А. Большаков, В. М. Герасимов и др.; Под ред. Г. П. Тартаковского.— М. : Сов. радио, 1963.— Т. 1.— 424 с.
2. *Ширман Я. Д., Манжос В. Н.* Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех.— М. : Радио и связь, 1981.— 416 с.
3. *Репин В. Г., Тартаковский Г. П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем.— М. : Сов. радио, 1977.— 432 с.
4. *Попов Д. И.* Анализ адаптивных режекторных фильтров // Радиотехника.— 1991.— № 10.— С. 31—34.

Рязанская государственная
радиотехническая академия.

Поступила в редакцию 23.06.98.

УДК 621.391

СЛЮСАР В. И.

МЕТОД АНАЛИЗА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ТОЧНОСТИ МНОГОКООРДИНАТНЫХ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Изложен подход, позволяющий автоматизировать процесс аналитической оценки точности измерения параметров M сигналов в РЛС с цифровой антенной решеткой.

Одной из важнейших проблем современной радиолокации является аналитическая оценка предельно достижимой точности многокоординатных измерений в многосигнальных ситуациях. Ее отсутствие вынуждает разработчиков проводить анализ точностных свойств конкурирующих методов обработки статистическим моделированием, но это предполагает значительные вычислительные затраты. Поэтому целью статьи является разработка метода формирования нижней границ Крамера—Рао, позволяющего аналитически оценить потенциально достижимую точность измерений в многокоординатных РЛС на базе цифровых антенных решеток (ЦАР).

Отправной точкой предлагаемого подхода является представление аналитической модели анализируемой многокоординатной радиолокационной системы с помощью торцевых произведений матриц [1]. При выводе нижней границы Крамера—Рао в случае M источников только таким путем удается использовать известные наработки, соответствующие односигнальной монопараметрической ситуации приема. Указанный путь существенно упрощает решение рассматриваемой задачи, хотя главная трудность, связанная с большой размерностью результатов матричного дифференцирования, все же остается.

Вот почему представляет интерес дальнейшее развитие аппарата торцевых умножений матриц, направленное на автоматизацию процесса формирования их многомерной матричной производной, а также снижение размерности вычислений в процессе вывода окончательной записи информационной матрицы Фишера, по которой строится нижняя граница точности.

Такого рода алгоритм формирования матричной производной удобно рассмотреть на примере четырехкоординатной модели импульсной РЛС с ЦАР [1], когда измерению подлежат угловые координаты совместно с радиальными скоростями и дальностями M источников:

$$P = Q \blacksquare F \blacksquare S \blacksquare D, \tag{1}$$

где Q и F суть $R \times M$-матрицы, S и D имеют соответственно размерности $T \times M$ и $N \times M$, а символ $\blacksquare$ означает операцию транспонирования торцевого произведения (ТТП), которая для $g \times p$-матрицы $A = [a_{ij}]$ и $s \times p$-матрицы B, представленной как блок-матрица столбцов $[B_j]$ ($B = [B_j], j = 1,\dots, p$), определяется равенством [1]

$$A \blacksquare B = [a_{ij} \cdot B_j].$$

Например, если $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$, то

$$A \blacksquare B = \begin{bmatrix} a_{11}\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} & a_{12}\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} & a_{13}\begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \end{bmatrix} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{21}\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} & a_{22}\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} & a_{23}\begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

По аналогии с [2], применительно к плоской эквидистантной ЦАР, матрицы Q и F можно трактовать как $R \times M$-матрицы значений характеристик направленности R приемных каналов в направлениях M источников в азимутальной и угломестной плоскостях соответственно, S как $T \times M$ -матрицу откликов T синтезированных частотных фильтров на частотах M сигналов, а D как аналогичную $N \times M$ -матрицу сигнальных характеристик N стробов дальности. При этом в отсутствие шумов набор выходных напряжений приемных каналов ЦАР может быть записан в виде $U = P \cdot A$, где $A = [\dot{a}_1 \;\; \dot{a}_2 \dots \dot{a}_M]^{\mathrm{T}}$ — вектор комплексных амплитуд сигналов.

При воздействии двух источников сигналов, к примеру,

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1(q_1) & Q_1(q_2) \\ Q_2(q_1) & Q_2(q_2) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ Q_R(q_1) & Q_R(q_2) \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} F_1(x_1) & F_1(x_2) \\ F_2(x_1) & F_2(x_2) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ F_R(x_1) & F_R(x_2) \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} S_1(\omega_1) & S_1(\omega_2) \\ S_2(\omega_1) & S_2(\omega_2) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ S_T(\omega_1) & S_T(\omega_2) \end{bmatrix},$$

$$
D=\begin{bmatrix} D_1(d_1) & D_1(d_2) \\ D_2(d_1) & D_2(d_2) \\ \vdots & \vdots \\ D_N(d_1) & D_N(d_2) \end{bmatrix}, P = Q \blacksquare F \blacksquare S \blacksquare D =
$$

$$
=\left[\begin{array}{c|c}
Q_1(q_1)\begin{bmatrix} F_1(x_1) \\ \vdots \\ F_R(x_1) \end{bmatrix} & Q_1(q_2)\begin{bmatrix} F_1(x_2) \\ \vdots \\ F_R(x_2) \end{bmatrix} \\
\hline
\vdots & \vdots \\
\hline
Q_R(q_1)\begin{bmatrix} F_1(x_1) \\ \vdots \\ F_R(x_1) \end{bmatrix} & Q_R(q_2)\begin{bmatrix} F_1(x_2) \\ \vdots \\ F_R(x_2) \end{bmatrix}
\end{array}\right]
\blacksquare
\left[\begin{array}{c|c}
S_1(\omega_1)\begin{bmatrix} D_1(d_1) \\ \vdots \\ D_N(d_1) \end{bmatrix} & S_1(\omega_2)\begin{bmatrix} D_1(d_2) \\ \vdots \\ D_N(d_2) \end{bmatrix} \\
\hline
\vdots & \vdots \\
\hline
S_T(\omega_1)\begin{bmatrix} D_1(d_1) \\ \vdots \\ D_N(d_1) \end{bmatrix} & S_T(\omega_2)\begin{bmatrix} D_1(d_2) \\ \vdots \\ D_N(d_2) \end{bmatrix}
\end{array}\right].
$$

При этом нижняя граница Крамера—Рао, согласно [2], запишется в виде:

$$
I=\sigma^2\left[\begin{array}{c:c}
P^T\cdot P & (A^*\otimes P^T)\cdot\dfrac{\partial P}{\partial Y} \\
\hdashline
\left(\dfrac{\partial P}{\partial Y}\right)^{\mathrm{T}}\cdot(A\otimes P) & \left(\dfrac{\partial P}{\partial Y}\right)^{\mathrm{T}}\cdot(A\,A^*\otimes 1_{RRTN})\cdot\dfrac{\partial P}{\partial Y}
\end{array}\right]^{-1}, \qquad (2)
$$

где $\partial P / \partial Y$ — производная Нойдеккера [3] от матрицы P по вектору Y, проблема вычисления которой и является камнем преткновения (Y составлен из неизвестных параметров сигналов M источников); 1_{RRTN} — единичная матрица размерности $R\times R\times T\times N$; $\otimes$ — символ кронекеровского произведения.

Как оказалось, процесс нахождения $\partial P / \partial Y$ легко поддается автоматизации с помощью ЭВМ. При этом в качестве исходных данных должны использоваться элементы сомножителей, образующих блочную матрицу P.

В основе вычислительного алгоритма лежит установленное автором свойство факторизации производной Нойдеккера от ТТП, которое в данном случае запишется в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial Y}=\frac{\partial}{\partial Y}(Q \blacksquare F \blacksquare S \blacksquare D)=\partial Q_y \circledcirc \partial F_y \circledcirc \partial S_y \circledcirc \partial D_y ,$$

где

$$\partial Q_y=\left[\begin{array}{c|c|c|c} Q_1 & Q_1 & Q_1 & \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} \\ \hline Q_2 & Q_2 & Q_2 & \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline Q_M & Q_M & Q_M & \frac{\partial Q_M}{\partial q_M} \end{array}\right], \quad \partial F_y=\left[\begin{array}{c|c|c|c} F_1 & F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & F_1 \\ \hline F_2 & F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & F_2 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline F_M & F_M & \frac{\partial F_M}{\partial x_M} & F_M \end{array}\right],$$

$$\partial S_y=\left[\begin{array}{c|c|c|c} S_1 & \frac{\partial S_1}{\partial \omega_1} & S_1 & S_1 \\ \hline S_2 & \frac{\partial S_2}{\partial \omega_2} & S_2 & S_2 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline S_M & \frac{\partial S_M}{\partial \omega_M} & S_M & S_M \end{array}\right], \quad \partial D_y=\left[\begin{array}{c|c|c|c} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & D_1 & D_1 & D_1 \\ \hline \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & D_2 & D_2 & D_2 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \frac{\partial F_M}{\partial x_M} & D_M & D_M & D_M \end{array}\right], \tag{3}$$

а символ $\circledcirc$ означает операцию транспонированного блочного торцевого умножения [1], которое, по определению, сводится к поблочной операции ТП, например,

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \circledcirc \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} A_{11} \blacksquare B_{11} & A_{12} \blacksquare B_{12} \\ \hline A_{21} \blacksquare B_{21} & A_{22} \blacksquare B_{22} \end{array}\right].$$

Выражение (3) наглядно демонстрирует следующие особенности факторизации производной $\partial P / \partial Y$, которые могут быть учтены при ее автоматическом формировании:

1) все блок-столбцы в пределах одной блочной матрицы, за исключением блок-столбца производных, тождественны;

2) индекс блока во всех блочных матрицах соответствует номеру столбца его элементов, отличного от нуля (все остальные элементы блока — нулевые), а также номеру источника, чья координата используется в качестве аргумента соответствующей характеристики, в частности для S_4 в матрице ∂S_y при $M = 5$ имеем

$$S_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & S_1(\omega_4) & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & S_T(\omega_4) & 0 \end{bmatrix},$$

аналогично

$$\frac{\partial S_1}{\partial \omega_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1(\omega_1)}{\partial \omega_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial S_1(\omega_1)}{\partial \omega_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

3) блок-столбец производных для используемого здесь обратного порядка формирования вектора неизвестгых Y перемещается в блочных матрицах справа налево (в рассматриваемом случае

$$Y = \left[d_1 \ldots d_M \,\middle|\, \omega_1 \ldots \omega_M \,\middle|\, x_1 \ldots x_M \,\middle|\, q_1 \ldots q_M \right]^{\mathrm{T}});$$

4) количество блок-строк в блочных матрицах определяется числом источников (для M источников — M блок-строк), а количество блок-столбцов равно числу матриц, участвующих в формировании ТТП.

Столь детальное рассмотрение свойств факторизации нойдеккеровской производной играет важную роль при последующем выводе окончательных зависимостей для составных блоков матрицы Фишера, в состав которых входит производная $\partial P / \partial Y$. В частности, для четырехкоординатной модели ЦАР, которой соответствует матрица $P(1)$, блоки матрицы Фишера, находящиеся вне главной диагонали могут быть выражены в виде

$$\left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)^T \cdot (A \otimes P) = [\partial Q_y^T \circledcirc \partial F_y^T \circledcirc \partial S_y^T \circledcirc \partial D_y^T] \cdot [A \otimes (Q \blacksquare F \blacksquare S \blacksquare D)], \quad (4)$$

$$(A^* \otimes P^T) \cdot \frac{\partial P}{\partial Y} = [A^* \otimes (Q^T \square F^T \square S^T \square D^T)] \times$$

$$\times [\partial Q_y \circledcirc \partial F_y \circledcirc \partial S_y \circledcirc \partial D_y], \quad (5)$$

где символом $\circledcirc$ обозначены блочные торцевые произведения [1] ($[A \circledcirc B]^T = A^T \circledcirc B^T$).

В результате исследований было доказано, что соотношения (4), (5) сводятся к поэлементным произведениям Адамара (все представленные далее зависимости ввиду чрезвычайной громоздкости промежуточных выкладок даны без доказательств):

$$\left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)^T \cdot (A \otimes P) = [\partial Q_y^T \cdot (A \otimes Q)] \circ$$

$$\circ [\partial F_y^T \cdot (1_M \otimes F)] \circ [\partial S_y^T \cdot (1_M \otimes S)] \circ [\partial D_y^T \cdot (1_M \otimes D)],$$

$$(A^* \otimes P^T) \cdot \frac{\partial P}{\partial Y} = [(A^* \otimes Q^T) \cdot \partial Q_y] \circ$$

$$\circ [(1_M^T \otimes F^T) \cdot \partial F_y] \circ [(1_M^T \otimes S^T) \cdot \partial S_y] \circ [(1_M^T \otimes D^T) \cdot \partial D_y],$$

где 1_M — вектор единичных амплитуд, совпадающий по размерности с вектором амплитуд A (в данном случае для M сигналов M-вектор единиц $1_M = [1 \ldots 1]^T$).

Понижение размерности блочных выражений путем сведения их к произведениям Адамара позволяет существенно упростить как прочтение результирующих записей блоков матрицы Фишера, так и вывод окончательных соотношений, пригодных для их численных расчетов на ЭВМ. Особенно эффективность такого подхода проявляется в задачах анализа точности многокоординатных РЛС.

Для правого нижнего блока матрицы Фишера также существует тождество, использующее факторизуемость производной $\partial P / \partial Y$. Следует отметить, что вывод окончательной записи для этого блока прежде вызывал особенно большие трудности в виду громоздкости необходимых аналитических выкладок. Отныне же данная процедура заметно упроститься, если учесть, что

$$\left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)^T \cdot (A A^* \otimes 1_{RRTN}) \cdot \frac{\partial P}{\partial Y} =$$

$$= [\partial Q_y^T \circledcirc \partial F_y^T \circledcirc \partial S_y^T \circledcirc \partial D_y^T] \cdot [A A^* \otimes 1_R \otimes 1_R \otimes 1_T \otimes 1_N] \times$$

$$\times [\partial Q_y \odot \partial F_y \odot \partial S_y \odot \partial D_y],$$

откуда искомое тождество, соответствующее (1), имеет вид

$$\left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)^T \cdot (A A^* \otimes 1_{RRTN}) \cdot \frac{\partial P}{\partial Y} =$$

$$= [\partial Q_y^T (A A^* \otimes 1_R) \, \partial Q_y] \circ [\partial F_y^T (1_{MM} \otimes 1_R) \, \partial F_y] \circ$$

$$\circ [\partial S_y^T (1_{MM} \otimes 1_T) \, \partial S_y] \circ [\partial D_y^T (1_{MM} \otimes 1_N) \, \partial D_y],$$

где 1_{MM} — $M \times M$-матрица, все элементы которой равны единице.

При большей размерности матрицы P, например, когда количество координат, измеряемых в РЛС, превышает четыре, следует использовать справедливое для рассматриваемого типа блочных матриц свойство «поглощения» кронекеровских произведений торцевыми:

$$[G^T \circledcirc N^T \circledcirc D^T \circledcirc L^T \ldots] \cdot$$

$$\cdot [A A^* \otimes 1_G \otimes 1_N \otimes 1_D \otimes 1_L \ldots] \cdot [G \odot N \odot D \odot L \ldots] =$$

$$= [G^T (A A^* \otimes 1_G) \, G] \circ [N^T (1_{MM} \otimes 1_N) \, N] \circ$$

$$\circ [D^T (1_{MM} \otimes 1_D) \, D] \circ [L^T (1_{MM} \otimes 1_L) \, L] \ldots$$

Наконец остается записать наиболее простой блок матрицы Фишера — левый верхний. Применяя известное по [4] тождество

$$(A \,\square\, B)(C \,\blacksquare\, D) = (A\, C) \circ (B\, D),$$

несложно получить:

$$P^T \cdot P = (Q^T \,\square\, F^T \,\square\, S^T \,\square\, D^T) \cdot (Q \,\blacksquare\, F \,\blacksquare\, S \,\blacksquare\, D) =$$

$$= (Q^T \cdot Q) \circ (F^T \cdot F) \circ (S^T \cdot S) \circ (D^T \cdot D).$$

Для нахождения нижней границы Крамера—Рао далее остается лишь произвести обращение сформированной матрицы Фишера, что достаточно просто сделать автоматически даже в табличном процессоре MS Exel, не говоря уж о специализированном пакете Mathcad 7.0(6.0)

Подтверждением актуальности приведенных результатов могут служить полученные на их основе свойства предельной разрешающей способности дальномерных процедур [5].

Ожидается, что изложенный здесь подход явится основой для теоретического прорыва в решении проблемы аналитической оценки точности многокоординатных конформных мультистатичных РЛС с ЦАР, функционирующих в многосигнальном режиме. К сожалению, непомерно растущая математическая сложность соответствующих выкладок, ограничивает их публикацию в периодической печати.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Слюсар В. И.* Торцевые произведения матриц в радиолокационных приложениях // Радиоэлектроника.— 1998.— № 3.— С. 71—75. (Изв. высш. учеб. заведений).

2. *Слюсар В. И.* Синтез алгоритмов измерения дальности *M* источников при дополнительном стробировании отсчетов АЦП // Радиоэлектроника.— 1996.— № 5.— С. 55—62. (Изв. высш. учеб. заведений).

3. *Колло Тыну.* Матричная производная для многомерной статистики.— Тарту : Тартуский университет, 1991.— С. 24—29.

4. *Слюсар В. И.* Новые операции умножения матриц в радиолокационных приложениях. В сб. «Прямі та обернені задачі теорії електромагнітних та акустичних хвиль» (DIPED-97).— Львов.— 1997.— С. 73—74.

5. *Слюсар В. И.* Предельное разрешение дальномерных процедур максимального правдоподобия // Радиоэлектроника.— 1998.— № 11.— С. 39—45. (Изв. высш. учеб. заведений).

г. Киев. Поступила в редакцию 06.10.98.

УДК 621.372.8

ПОЧЕРНЯЕВ В. Н.

ДВОЙНОЙ ВОЛНОВОДНЫЙ ТРОЙНИК НА ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВОЛНОВОДАХ

Теоретически и экспериментально исследован коэффициент стоячей волны двойного волноводного тройника на частично заполненных диэлектриком прямоугольных волноводах, диэлектрические пластины которых не касаются стенок волновода.

Тракты СВЧ многоканальной радиосвязи представляют собой сложные волноводные соединения, включающие разделительные фильтры с двойными волноводными тройниками. Такие тракты могут быть реализованы на прямоугольных волноводах, частично заполненных диэлектриком. Целью работы является определение коэффициентов матрицы рассеяния двойного волноводного тройника на частично заполненном прямоугольном волноводе (ЧЗПВ) и экспериментальные исследования таких устройств.

Коэффициенты матрицы рассеяния двойного волноводного тройника имеют вид [1]: